Lista de Exercício 1

Disciplina: MTM5245 - Álgebra Linear
Professor: Juliano B. Francisco

Questão 1: Seja V um espaço vetorial e considere $x \in V$ qualquer e $c \in \mathbb{R}$. Usando os oito axiomas da definição de espaço vetorial mostre que:
(i) $0x = 0$ (ii) Se $x + y = 0$ então $y = -x$ (isto é, o inverso aditivo de x é único) (iii) $(-1)x = -x$
(iv) $c0 = 0$ (v) Se $cx = 0$ então $c = 0$ ou $v = 0$.

Questão 2: Seja $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a, b > 0\}$. Dados $(a, b), (c, d) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina as operações em V:
Soma: $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd)$ Prod. por um escalar: $\alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$.
O conjunto V com estas operações é um espaço vetorial? Em caso afirmativo mostre, caso contrário, indique quais axiomas falham.

Questão 3: Verifique se cada conjunto abaixo é ou não um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 1\}$ (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$

Questão 4: Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Verifique se cada conjunto abaixo é ou não um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$ com a soma e produto por um escalar usuais.
(a) $\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | AB = BA\}$ (b) $\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | AB \neq BA\}$ (c) $\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} | BA = 0\}$

Questão 5: Seja W um espaço vetorial e considere $U, V \subseteq W$ subespaços vetoriais de W. Defina

$$U + V = \{z \in W | z = u + v \text{ em que } u \in U \text{ e } v \in V\}.$$

Mostre que $U + V$ é um subespaço vetorial de W.

Questão 6: Mostre que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Questão 7: Encontre uma base para $\mathbb{R}^{n\times n}$. Qual a dimensão desse espaço vetorial?

Questão 8: Seja $\mathbb{P}_k$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual k. Mostre que $\mathbb{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}$, que é o espaço vetorial formado pelo conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais (com a soma e produto por um escalar usual). Encontre uma base para $\mathbb{P}_k$ e indique sua dimensão.

Questão 9: Mostre que $\{1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t, 1\}$ gera $\mathbb{P}_3$

Questão 10: Sejam A uma matriz $n \times n$ e $u_1, \ldots, u_r$ vetores colunas $n \times 1$. Mostre que, se $Au_1, \ldots, Au_r$ são vetores vetores linearmente independes, então $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são linearmente independentes.

Questão 11: Ache uma base e a dimensão do subespaço $W \subseteq \mathbb{P}$ gerado pelos polinômios abaixo:
(a) $\{t^3 + 2t^2 - 2t + 1, t^3 + 3t^2 - t + 4, 2t^3 + t^2 - 7t - 7\}$
(b) $\{t^3 + t^2 - 3t + 2, 2t^3 + t^2 + t - 4, 4t^3 + 3t^2 - 5t + 2\}$